Simulation de Modèles Discrets

Fabien Givors

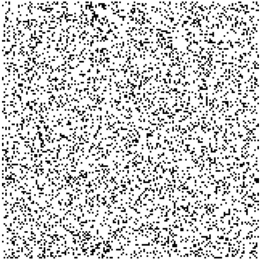
d'après les cours d'Alberto Dennunzio

Département d'Informatique
Université de Nice-Sophia Antipolis

Intervenants

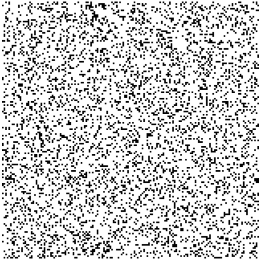
1. Fabien Givors (1ère partie)
2. Olivier Dalle (2ème partie)

Gaz



Problème : Equations de la Physique difficiles à résoudre !

Gaz



Problème : Equations de la Physique difficiles à résoudre !

Solution :

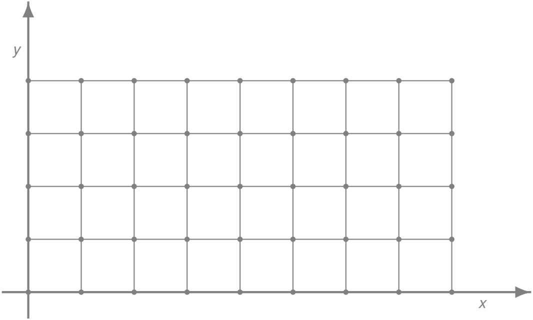
- introduire un modèle qui décrit le gaz et son mouvement
- étudier le modèle
- **implémenter le modèle**
- **faire des simulations**

Modèle

- Représentation (simplifiée) d'un objet/phénomène réel
- Reproduit les caractéristiques/comportements principaux

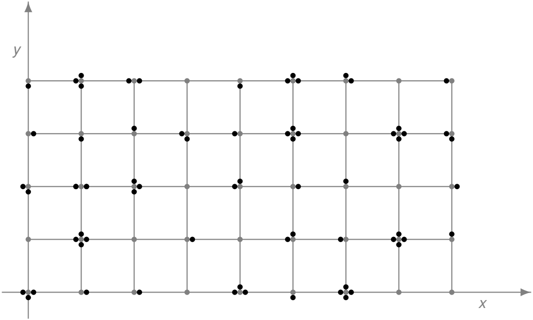
Modèle pour les gaz

espace physique : discrétisation par la grille $\mathcal{L}$



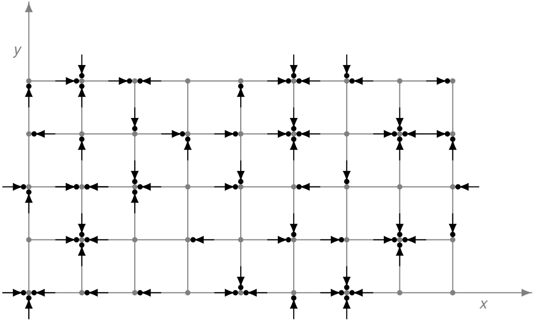
Modèle pour les gaz

gaz : particules dans les cases avec une masse



Modèle pour les gaz

gaz : particules dans le cases avec une masse et une vitesse



Modèle pour les gaz

Règle du mouvement :

Collision (dans les cases) + propagation (entre les cases)

Modèle pour les gaz

Règle du mouvement :

Collision (dans les cases) + propagation (entre les cases)

Collision et propagation appliquées :

- à toutes les cases
- de façon synchrone (partout en même temps)
- plusieurs fois (plusieurs étapes)

Modèle pour les gaz

Évolution dans le temps :

- itération de la règle du mouvement

Simplification

Discrétisation de l'espace :

passage d'un nombre infini réel à un nombre fini ou dénombrable de positions $\vec{x}$.

$$\vec{x} \in \mathcal{L}$$

Simplification

Configuration c :

affectation à chaque position d'un élément (état) $s \in S$

$$c : \mathcal{L} \rightarrow S$$

Simplification

Configuration c :

affectation à chaque position d'un élément (état) $s \in S$

$$c : \mathcal{L} \to S$$

Dans le modèle de gaz $S = \{0, 1\}^5$

$c(\vec{x}) = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$

$s_0 = 1$ ssi la case $\vec{x}$ peut contenir particules de gaz
$s_1 = 1$ ssi dans la case $\vec{x}$ il y a une particule dans la direction $\rightarrow$
$s_2 = 1$ ssi dans la case $\vec{x}$ il y a une particule dans la direction $\leftarrow$
$s_3 = 1$ ssi dans la case $\vec{x}$ il y a une particule dans la direction $\uparrow$
$s_4 = 1$ ssi dans la case $\vec{x}$ il y a une particule dans la direction $\downarrow$

Discrétisation du temps :

le phénomène se passe en instants temporels t multiples entiers d'une unité temporelle.

$$t = 0, 1, 2, \dots$$

Simplification

Identification d'une règle d'évolution sur les configurations du modèle : (modèles déterministes)

Une fonction g qui décrit comment le phénomène se passe dans le temps.

$$g : C \to C$$

C : ensemble des configurations

Modèle versus réalité

Pour le modèle de gaz

Théorème

Le modèle rejoint de manière continue les équations de la physique lorsque l'on fait tendre les pas de calculs et les cases de la grille vers l'infiniement petit.

$$(C, g)$$

C : ensemble des configurations

$g : C \to C$: fonction configuration prochaine

Evolution dynamique

séquence

$$c(0) \xrightarrow{g} c(1) \xrightarrow{g} c(2) \xrightarrow{g} c(3) \xrightarrow{g} c(4) \xrightarrow{g} \cdots$$

$$c(t+1) = g(c(t))$$

$c(0)$: configuration au temps $t = 0$ (configuration initiale)
$c(1)$: configuration au temps $t = 1$
$c(2)$: configuration au temps $t = 2$

$$\vdots$$

$c(t)$: configuration au temps t
$c(t+1)$: configuration au temps $t+1$

$$\vdots$$

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

évolution dynamique à partir de $c(0) = 2$:

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

évolution dynamique à partir de $c(0) = 2$:

$c(0) = 2$

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

évolution dynamique à partir de $c(0) = 2$:

$c(0) = 2$
$c(1) = g(c(0)) = 3 \cdot c(0) = 6$

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

évolution dynamique à partir de $c(0) = 2$:

$$c(0) = 2$$
$$c(1) = g(c(0)) = 3 \cdot c(0) = 6$$
$$c(2) = g(c(1)) = 3 \cdot c(1) = 18$$

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

évolution dynamique à partir de $c(0) = 2$:

$$\begin{aligned}
c(0) &= 2 \\
c(1) &= g(c(0)) = 3 \cdot c(0) = 6 \\
c(2) &= g(c(1)) = 3 \cdot c(1) = 18 \\
c(3) &= g(c(2)) = 3 \cdot c(2) = 54
\end{aligned}$$

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

évolution dynamique à partir de $c(0) = 2$:

$$\begin{aligned}
c(0) &= 2 \\
c(1) &= g(c(0)) = 3 \cdot c(0) = 6 \\
c(2) &= g(c(1)) = 3 \cdot c(1) = 18 \\
c(3) &= g(c(2)) = 3 \cdot c(2) = 54 \\
c(4) &= g(c(3)) = 3 \cdot c(3) = 162 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Example/1

$$(C, g)$$

$C = \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad g(c) = 3 \cdot c$

évolution dynamique à partir de $c(0) = 2$:

$$\begin{aligned}
c(0) &= 2 \\
c(1) &= g(c(0)) = 3 \cdot c(0) = 6 \\
c(2) &= g(c(1)) = 3 \cdot c(1) = 18 \\
c(3) &= g(c(2)) = 3 \cdot c(2) = 54 \\
c(4) &= g(c(3)) = 3 \cdot c(3) = 162 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$c(0) = 2 \xrightarrow{g} c(1) = 6 \xrightarrow{g} c(2) = 18 \xrightarrow{g} c(3) = 54 \xrightarrow{g} c(4) = 162 \xrightarrow{g} \cdots$$

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0,1\}^4$
$g : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0,1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0, 1\}^4$
$g : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0, 1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

évolution dynamique à partir de $c(0) = (1, 1, 1, 0)$:

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0,1\}^4$
$g : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0,1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

évolution dynamique à partir de $c(0) = (1,1,1,0)$:

$c(0) = (1,1,1,0)$

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0, 1\}^4$
$g : \{0, 1\}^4 \to \{0, 1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0, 1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

évolution dynamique à partir de $c(0) = (1, 1, 1, 0)$:

$c(0) = (1, 1, 1, 0)$
$c(1) = g(c(0)) = (1, 1, 0, 1)$

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0,1\}^4$
$g : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0,1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

évolution dynamique à partir de $c(0) = (1,1,1,0)$:

$c(0) = (1,1,1,0)$
$c(1) = g(c(0)) = (1,1,0,1)$
$c(2) = g(c(1)) = (1,1,1,0)$

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0,1\}^4$
$g : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0,1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

évolution dynamique à partir de $c(0) = (1,1,1,0)$:

$c(0) = (1,1,1,0)$
$c(1) = g(c(0)) = (1,1,0,1)$
$c(2) = g(c(1)) = (1,1,1,0)$
$c(3) = g(c(2)) = (1,1,0,1)$

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0,1\}^4$
$g : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0,1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

évolution dynamique à partir de $c(0) = (1,1,1,0)$:

$$\begin{aligned}
c(0) &= (1,1,1,0) \\
c(1) &= g(c(0)) = (1,1,0,1) \\
c(2) &= g(c(1)) = (1,1,1,0) \\
c(3) &= g(c(2)) = (1,1,0,1) \\
c(4) &= g(c(3)) = (1,1,1,0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Example/2

$$(C, g)$$

$C = \{0, 1\}^4$
$g : \{0, 1\}^4 \to \{0, 1\}^4$ définie comme $\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \{0, 1\}^4$

$$g(c) = (c_1 \textit{ and } c_2, c_3 \textit{ xor } c_4, c_1 \textit{ xor } c_2 \textit{ xor } c_4, c_2 \textit{ and } c_3)$$

évolution dynamique à partir de $c(0) = (1, 1, 1, 0)$:

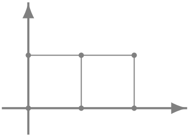
$$
\begin{aligned}
c(0) &= (1, 1, 1, 0) \\
c(1) &= g(c(0)) = (1, 1, 0, 1) \\
c(2) &= g(c(1)) = (1, 1, 1, 0) \\
c(3) &= g(c(2)) = (1, 1, 0, 1) \\
c(4) &= g(c(3)) = (1, 1, 1, 0) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$c(0) = (1, 1, 1, 0) \xrightarrow{g} c(1) = (1, 1, 0, 1) \xrightarrow{g} c(2) = (1, 1, 1, 0) \xrightarrow{g} \cdots$$

Example/3

$$(C, g)$$

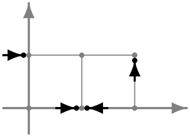
$C = S^{\mathcal{L}}$ comme les gaz
$S = \{0, 1\}^5$
$\mathcal{L} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$



$g : S^{\mathcal{L}} \to S^{\mathcal{L}}$ comme les gaz (collision + propagation)

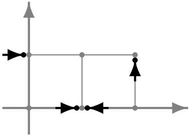
Example/3

$c(0) =$
$((1,0,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,0,0,0,0),(1,0,0,1,0))$

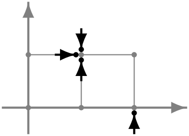


Example/3

$c(0) =$
$((1,0,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,0,0,0,0),(1,0,0,1,0))$



$c(1) =$
$((1,0,0,0,0),(1,0,0,0,0),(1,0,0,1,0),(1,0,0,0,0),(1,1,0,1,1),(1,0,0,0,0))$



$c(2) = \ldots$

Simulation

Représentation d'une évolution dynamique

- papier
- à l'ordinateur
- ...

Point d'équilibre/périodique

Une configuration c est un point d'équilibre ssi

$$g(c) = c$$

Point d'équilibre/périodique

Une configuration c est un point d'équilibre ssi

$$g(c) = c$$

Une configuration c est un point périodique ssi

$$g^k(c) = c$$

$(k > 1)$

Modèles discrets versus systèmes dynamiques discrets

Modèle discret en temps et avec règle déterministe

$\downarrow$

Système dynamique discret

Famille de modèles dépendant par des paramètres

Même phénomène avec hypothèses différentes

Différents règles obtenues en changeant des paramètres $\alpha, \beta, \ldots$

Famille de systèmes dynamiques discrets $(C, g_{\alpha,\beta,\ldots})$

Modèle non-déterministe

- Règle non-déterministe

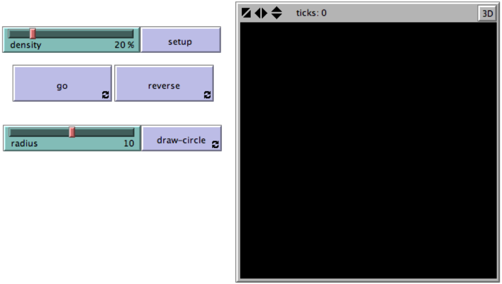
Netlogo : environ pour simulations de modèles discrets

- Développé en 1999
- Écrit en Java
- Programmable via un méta-langage à objets simplifié

Netlogo

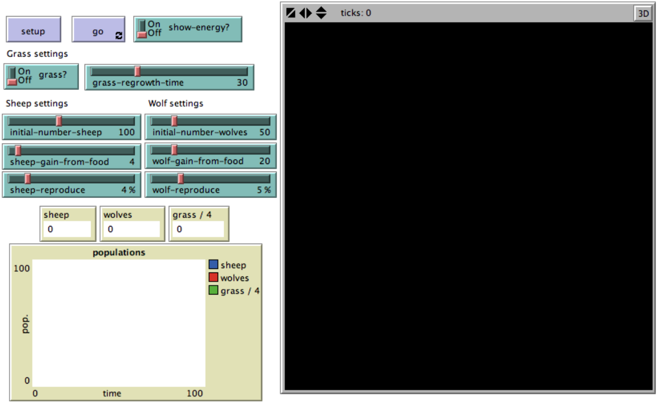
- implémenter des modèles discrets
- visualiser en temps réel leurs évolutions
- modifier les conditions initiales
- modifier les paramètres de contrôle
- visualiser variables et graphiques concernants les simulations
- importer/sauver images et données
- disposer d'une riche librairie de modèles pré-implémentés
- ...

Interface (modèle pour les gas)



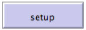
- boutons (en bleu)
- sliders et switches (en vert)
- vue du monde

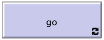
Interface (modèle de prédation wolf sheep)

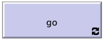


- boutons (en bleu)
- sliders et switches (en vert)
- monitors et plots (en beige)
- vue du monde

Boutons

- créer la configuration initiale 

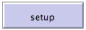
- faire partir une simulation 

- arrêter une simulation 

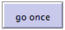
- . . . autres actions . . .

Boutons : deux types

1. “once”
   produisent une action seulement une fois

   action : création de la configuration initiale

   action : application de la règle d’évolution

2. “forever” (deux arêtes dans le coin en bas à droite)
   produisent la répétition d’une action et son arrêt

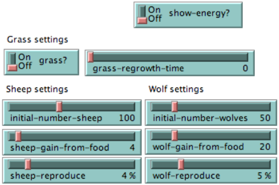
   action : application de la règle d’évolution

Barres et Interrupteurs

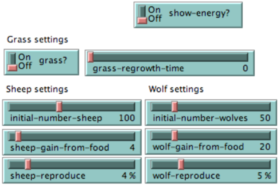
- modifier les paramètres de la règle d'évolution d'un modèle
- modifier la façon de créer la configuration initiale
- . . . modifier autres réglages . . .

barre : intervalle de valeurs
interrupteur : 2 valeurs (on/off)

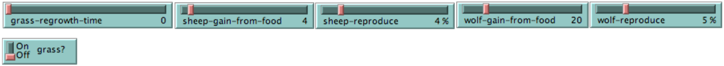
Barres et Interrupteurs (modèle loup-mouton)



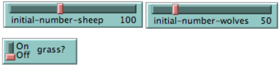
Barres et Interrupteurs (modèle loup-mouton)



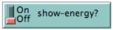
- modifier les paramètres de la règle d'évolution d'un modèle



- modifier la façon de créer la configuration initiale



- modifier la visualisation du monde



Plots et Monitors

- visualiser les données des simulations

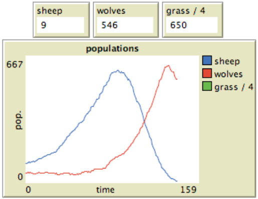
Plots et Monitors

- visualiser les données des simulations

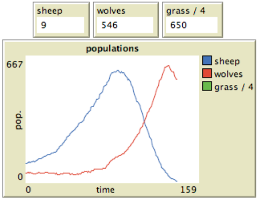
Plots :
- diagrammes de l'évolution de variables dans le temps
- histogrammes

Monitors :
- valeur d'une variable

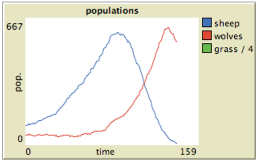
Plots et Monitors (modèle de prédation loup-mouton)



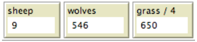
Plots et Monitors (modèle de prédation loup-mouton)



Plots :

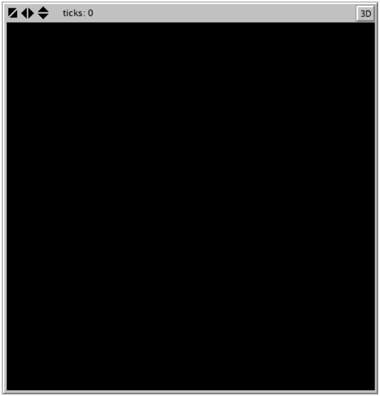


Monitors :

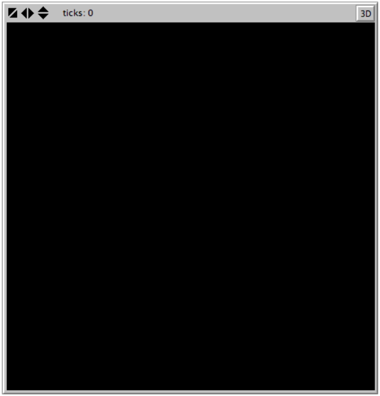


Vue du monde

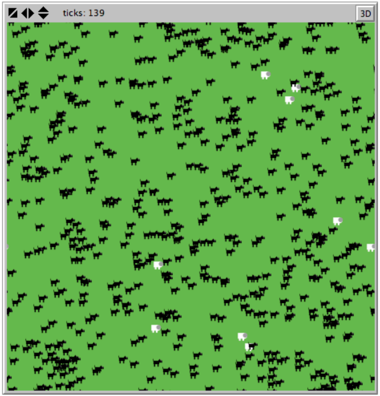
avant une simulation



Vue du monde (modèle de prédation loup-mouton)



avant une simulation



pendant une simulation

pas seulement l'interface...

Information :

information sur le modèle

Procedures :

code Netlogo des procédures