Calculabilité II

Introduction aux automates cellulaires

Fabien Givors

d'après la thèse de Gaëtan Richard

Université Nice — Sophia-Antipolis

UE: SMZIFO12

Année universitaire 2014-2015

1. naissance des automates cellulaires

Motivations et éléments

Historique

- Modéliser des systèmes qui peuvent se reproduire eux-même
- Idée suggérée par Stanislaw Ulam
- Introduite par John von Neumann
- Utilisation de règles locales
- Calcul massivement parallèle
- Puissance de calcul locale limitée

Points importants :

- Théorie initiée dans les années 1940
- État de l'art publié en 1966
- Les automates cellulaires permettent de simuler les machines de Turing

Le point de vue des systèmes dynamiques

Système dynamique

- Un système dynamique est décrit par
  - un espace des configurations/phases/états
  - une loi d'évolution.

Le point de vue des systèmes dynamiques

Système dynamique

- Un système dynamique est décrit par
  - un espace des configurations/phases/états
  - une loi d'évolution.
- SD à dynamique discrète
  - temps discret
  - une fonction d'évolution à itérer

Le point de vue des systèmes dynamiques

Système dynamique

- Un système dynamique est décrit par
  - un espace des configurations/phases/états
  - une loi d'évolution.
- SD à dynamique discrète
  - temps discret
  - une fonction d'évolution à itérer

- Exemple des Automates finis
  - Espace des phases : états de l'automate ($q \in Q$)
  - Loi d'évolution : fonction de transition ($\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$)

Le point de vue des systèmes dynamiques

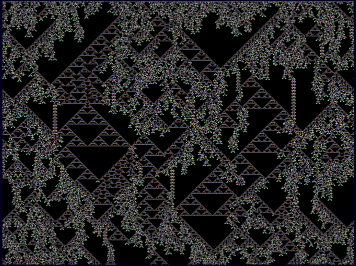
Système dynamique

- Un système dynamique est décrit par
  - un espace des configurations/phases/états
  - une loi d'évolution.
- SD à dynamique discrète
  - temps discret
  - une fonction d'évolution à itérer

- Exemple des Automates finis
  - Espace des phases : états de l'automate ($q \in Q$)
  - Loi d'évolution : fonction de transition ($\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$)
- Exemple des Machines de Turing
  - Espace des phases : états de l'automate et du ruban ($(q, c) \in Q \times \Sigma^{\mathbb{Z}}$)
  - Loi d'évolution : fonction de transition ($\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q \times \Sigma \times \{\longleftarrow, \longrightarrow\}$)

2. introduction aux automates cellulaires

Définitions



Définition formelle (1D)

Un **automate cellulaire** est un triplet $\mathcal{A} = (Q, r, f)$, où

- Q est un *ensemble fini d'états*,
- $r \in \mathbb{N}$ est le *rayon* de l'automate,
- $f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q$ est la *règle locale de transition*.

Définition formelle (1D)

Un **automate cellulaire** est un triplet $\mathcal{A} = (Q, r, f)$, où

- Q est un *ensemble fini d'états*,
- $r \in \mathbb{N}$ est le *rayon* de l'automate,
- $f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q$ est la *règle locale de transition*.

Configuration = mot bi-infini: $c \in Q^{\mathbb{Z}}$.

Définition formelle (1D)

Un **automate cellulaire** est un triplet $\mathcal{A} = (Q, r, f)$, où

- Q est un *ensemble fini d'états*,
- $r \in \mathbb{N}$ est le *rayon* de l'automate,
- $f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q$ est la *règle locale de transition*.

Configuration = mot bi-infini: $c \in Q^{\mathbb{Z}}$.

Règle locale ($f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q$) appliquée simultanément partout

Définition formelle (1D)

Un **automate cellulaire** est un triplet $\mathcal{A} = (Q, r, f)$, où

- Q est un *ensemble fini d'états*,
- $r \in \mathbb{N}$ est le *rayon* de l'automate,
- $f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q$ est la *règle locale de transition*.

Configuration = mot bi-infini: $c \in Q^{\mathbb{Z}}$.

Règle locale ($f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q$) appliquée simultanément partout

$\Rightarrow$ Règle globale de transition :

$$F : Q^{\mathbb{Z}} \longrightarrow Q^{\mathbb{Z}}$$

Telle que

$$\forall i, f(c_{[\![i-r, i+r]\!]}) = (F(c))_i$$

Énumération des règles pour $r = 1$ et $|Q| = 2$

Espace des fonctions locales :

$$f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q, \text{ i.e.}$$

Énumération des règles pour $r = 1$ et $|Q| = 2$

Espace des fonctions locales :

$$f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q, \text{ i.e. } f \in Q^{Q^{2r+1}}$$

Énumération des règles pour $r = 1$ et $|Q| = 2$

Espace des fonctions locales :

$$f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q, \text{ i.e. } f \in Q^{Q^{2r+1}}$$

Cardinalité :

$$\left| Q^{Q^{2r+1}} \right| =$$

Énumération des règles pour $r = 1$ et $|Q| = 2$

Espace des fonctions locales :

$$f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q, \text{ i.e. } f \in Q^{Q^{2r+1}}$$

Cardinalité :

$$\left|Q^{Q^{2r+1}}\right| = |Q|^{|Q^{2r+1}|} = (2)^{2^3} = 256$$

Énumération des règles pour $r = 1$ et $|Q| = 2$

Espace des fonctions locales :

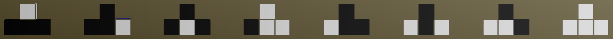
$$f : Q^{2r+1} \longrightarrow Q, \text{ i.e. } f \in Q^{Q^{2r+1}}$$

Cardinalité :

$$\left| Q^{Q^{2r+1}} \right| = |Q|^{|Q^{2r+1}|} = (2)^{2^3} = 256$$

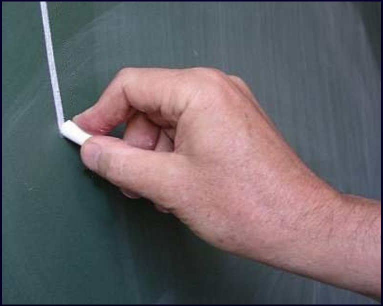
Énumération de Wolfram (de 0 à 255) :

Codage binaire :



0 1 1 0 1 1 1 0 $(=110)$

Exemple



Règle 110, $c_0 = 0^*000100110111110^*$

Distance, cylindres, topologie…

Distance entre c et c' :

$$d(c, c') = 2^{-\min_{i \in \mathbb{Z}}\{|i| : c_i \neq c'_i\}}$$

Distance, cylindres, topologie...

Distance entre c et c' :

$$d(c, c') = 2^{-\min_{i \in \mathbb{Z}}\{|i| : c_i \neq c'_i\}}$$

Boule de rayon α et de centre c :

$$\mathcal{D}_\alpha(c) = \left\{c' : d(c, c') \leq \alpha\right\}$$

Topologie, clopens...

Orbites, ensemble limite

Orbite de c:

$$\mathcal{O}(c) = \left\{F^{(n)}(c) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Orbites, ensemble limite

Orbite de c:

$$\mathcal{O}(c) = \left\{F^{(n)}(c) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Ensemble limite de F:

$$\Omega_F = \cap_{n\in\mathbb{N}} F^{(n)}(Q^{\mathbb{Z}})$$

Shift, sous-shifts…

Le shift σ:

$$\forall c, \forall i, (\sigma(c))_i = c_{i+1}$$

Shift, sous-shifts…

Le shift σ:

$$\forall c, \forall i, (\sigma(c))_i = c_{i+1}$$

G. Hedlund, 1969 Les fonctions de transition globales des automates cellulaires sur l'alphabet Q sont les fonctions continues de $Q^{\mathbb{Z}} \to Q^{\mathbb{Z}}$ qui commutent avec le shift.

Shift, sous-shifts…

Le shift σ:

$$\forall c, \forall i, (\sigma(c))_i = c_{i+1}$$

G. Hedlund, 1969 Les fonctions de transition globales des automates cellulaires sur l'alphabet Q sont les fonctions continues de $Q^{\mathbb{Z}} \to Q^{\mathbb{Z}}$ qui commutent avec le shift.

L'ensemble limite Ω_F est un shift.

Quelques propriétés…

E. Moore, 1962 et J. Myhill, 1963. Un automate cellulaire est surjectif si et seulement si il est injectif sur les configurations finies.

Quelques propriétés…

E. Moore, 1962 et J. Myhill, 1963. Un automate cellulaire est surjectif si et seulement si il est injectif sur les configurations finies.

S. Amoroso et Y. Patt, 1972. L,injectivité et la surjectivité sont décidable pour les automates cellulaires 1D.

Quelques propriétés…

E. Moore, 1962 et J. Myhill, 1963. Un automate cellulaire est surjectif si et seulement si il est injectif sur les configurations finies.

S. Amoroso et Y. Patt, 1972. L,injectivité et la surjectivité sont décidable pour les automates cellulaires 1D.

J. Kari, 1992. La nilpotence (toutes les configurations deviennent uniformes) des automates cellulaires est indécidable.

Universalité Turing

Il est possible de simuler une machine de Turing avec un Automate Cellulaire.

Universalité Turing

Il est possible de simuler une machine de Turing avec un Automate Cellulaire.