TD 01 — Découverte du λ-calcul

fabien.givors@unice.fr

2014-2015

1 Échauffement

Exercice 1. Dans les expressions suivantes, déterminez les variables/occurrences libres et liées :

1. $(\lambda c.\, c)\,((\lambda y.\, y)\, c)$
2. $(\lambda x.\, y\, x)\,(\lambda y.\, x\, y)$
3. $(\lambda x.\, (\lambda y.\, y) z)\,((\lambda y.\, y) x)$
4. $(\lambda x.\, (\lambda y.\, x\, y\, z))\,(\lambda z \lambda y.\, x\, y\, z)\,(\lambda x.\, x\, y\, z)$

Exercice 2. Simplifiez :

1. $(\lambda x.(\lambda y.xy))(\lambda u.u)v$
2. $(\lambda x \lambda y.\, x)\,(\lambda z.\, z)\, y\,(\lambda x.\, x\ x)$
3. $(\lambda g.\, g)\,(\lambda y.\, y)\,(\lambda f \lambda x.\, f\, x)$

2 Booléens

Exercice 3. On définit les booléens comme suit :

- $true = \lambda x \lambda y.\, x$
- $false = \lambda x \lambda y.\, y$
- $cond = \lambda x \lambda y \lambda z.\, x\, y\, z$

1. Identifiez les λ-termes représentant les opérateurs booléens suivants :
   - *not*
   - *and*
   - *or*
   - *equiv*
2. Simplifiez les termes trouvés si possible.

3 Théorie

Exercice 4. À partir de la propriété du diamant, démontrer la propriété de confluence.

Exercice 5. Montrer formellement l'unicité de la forme normale.

4 Autres termes remarquables *KIS*

Exercice 6. On considère les λ-termes suivants :

- $I = \lambda x.\, x$
- $K = \lambda x \lambda y.\, x$
- $S = \lambda x \lambda y \lambda z.\, x\, z\, (yz)$

Essayez de dériver les termes suivants en n'utilisant que les trois termes ci-dessus :

1. $true$
2. $false$
3. Ω

Exercice 7. Notation de Church
On considère les trois termes suivants :

- $e_1 = \lambda f \lambda x.\, x$
- $e_2 = \lambda f \lambda x.\, f\,(f\, x)$
- $e_3 = \lambda f \lambda x.\, f\,(f\,(f\, x))$

1. Simplifiez $\lambda f \lambda x.\, e_1\, f\,(e_2\, f\, x)$ et $\lambda f \lambda x.\, e_2\, f\,(e_1\, f\, x)$
2. Simplifiez $\lambda f \lambda x.\, e_3\, f\,(e_2\, f\, x)$ et $\lambda f \lambda x.\, e_2\, f\,(e_3\, f\, x)$
3. Simplifiez $\lambda f \lambda x.\, e_3\, f\,(e_3\, f\, x)$
4. Quelle sémantique associer à ces termes ?
5. Simplifiez $\lambda f \lambda x. e_1\,(e_2 f) x$ et $\lambda f \lambda x. e_2\,(e_1\, f)\, x$
6. Simplifiez $\lambda f \lambda x. e_2\,(e_3 f) x$ et $\lambda f \lambda x. e_3\,(e_2\, f)\, x$
7. Simplifiez $\lambda f \lambda x. e_3\,(e_3\, f)\, x$
8. Coder les deux opérateurs classiques sur ces termes.

Exercice 8. Que dire sur les dérivations du terme suivant :

$$(\lambda x \lambda y.\, y)(\lambda a.\, a\, a\,(\lambda b.\, b\, b))(\lambda t.\, t)$$

Que pouvez-vous conjecturer sur une méthode pour trouver à coup sûr une forme normale si elle existe?

5 Typage

Exercice 9. Calculer les types des λ-termes suivants :

1. $\lambda x : \sigma_1 \to \sigma_2 \lambda y : \sigma_2 \to \sigma_3 \lambda z : \sigma_1.\, y(xz)$
2. $\lambda f : (\sigma_1 \to \sigma_2) \to \sigma_1 \to \sigma_2 \lambda x : \sigma_1 \to \sigma_2.\, f\, x$
3. $\lambda x : a \to a.\, x\, x$

Exercice 10. Inférences de type :

1. Calculer les types de K, I et S
2. Calculer les types des booléns
3. Calculer les types des entiers
4. Calculer le type de Ω
5. Calculer le type de Y

Exercice 11. Preuve de théorèmes : Trouver des λ-termes prouvant les énoncés :

1. $A \implies (B \implies A)$
2. $(B \implies A) \implies (C \implies B) \implies C \implies A$
3. $D \implies (A \implies B \implies C) \implies (A \implies B) \implies C$

6 Déduction naturelle

Exercice 12. Traduire les types ci-dessus en théorèmes de logique déductive naturelle.

7 Point fixe

Exercice 13. Écrire le code de la fonction factorielle en λ-calcul pur.