Forcing et degrés Turing

Ou comment faire de la calculabilité grâce à la théorie des ensembles

Fabien GIVORS

Sous la direction de Gregory Lafitte
LIF - Université de Provence

1er avril 2010

Forcing et degrés Turing

Ou comment faire de la calculabilité grâce à la théorie des ensembles

Fabien GIVORS

Sous la direction de Gregory Lafitte
LIF - Université de Provence

1er avril 2010

Forcing et degrés Turing

Ou comment faire de la calculabilité grâce à la théorie des ensembles

Fabien GIVORS

Sous la direction de Gregory Lafitte
LIF - Université de Provence

1er avril 2010

Forcing et degrés Turing

Ou comment faire de la calculabilité grâce à la théorie des ensembles

Fabien GIVORS

Sous la direction de Gregory Lafitte
LIF - Université de Provence

1er avril 2010

Plan

Plan

Les fonctions récursives

Elles correspondent à votre notion *intuitive* de *calcul* :

- programmes écrits dans votre langage de prog. favori,
- fonctions calculées par les machines de Turing,
- fonctions à la Church-Rosser (**zero**, **s**, $\pi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}$, $\circ$, **rec**, $\mathbf{Sch}_{\mu}$).

Notions de calculabilité

Rappels

Les fonctions récursives

Elles correspondent à votre notion *intuitive* de *calcul* :

- programmes écrits dans votre langage de prog. favori,
- fonctions calculées par les machines de Turing,
- fonctions à la Church-Rosser (**zero**, **s**, $\pi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}$, $\circ$, **rec**, $\mathbf{Sch}_\mu$).

- Systèmes acceptables de programmation

$\Rightarrow$ Énumérabilité des fonctions : $(\varphi_e)_{e\in\mathbb{N}}$

Notions de calculabilité
Rappels

Les fonctions récursives

Elles correspondent à votre notion *intuitive* de *calcul* :

- programmes écrits dans votre langage de prog. favori,
- fonctions calculées par les machines de Turing,
- fonctions à la Church-Rosser (**zero**, **s**, $\pi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}$, $\circ$, **rec**, $\mathbf{Sch}_\mu$).

- Systèmes acceptables de programmation

$\Rightarrow$ Énumérabilité des fonctions : $(\varphi_e)_{e\in\mathbb{N}}$

Ensembles récursivement énumérables (*r.e.*)

- E *r.e.* $\iff \exists e \in \mathbb{N}, \varphi_e$ énumère tous les éléments de E.

Notions de calculabilité
Rappels

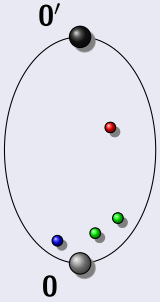
φ_e^A : fonction récursive à oracle, sait calculer χ_A.

φ_e^A : fonction récursive à oracle, sait calculer χ_A.

Les degrés Turing

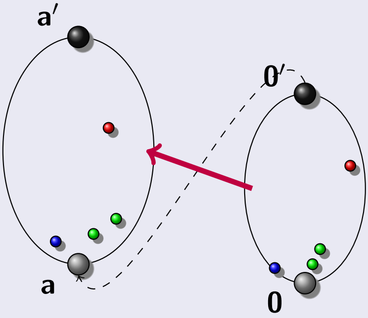
- Réduction Turing : $A \leqslant_T B \Leftrightarrow \exists e, \varphi_e^B$ énumère A
- Degrés : $(\mathfrak{P}(\mathbb{N})/\equiv_T) = \mathbf{D}$
- Treillis supérieur : $(\mathbf{D}, \leqslant_T)$
- Incomparables : $(\mathbf{a} \nleqslant_T \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \nleqslant_T \mathbf{a})$
- Pb. de l'arrêt et *saut* de A : $\mathbf{K}^A = \{e \mid \varphi_e^A(e)\downarrow\}$
- $deg(A) = \mathbf{a}$, $deg(\mathbf{K}^A) = \mathbf{a}'$, $deg(\emptyset) = \mathbf{0}$, $deg(K^\emptyset) = \mathbf{0}'$
- $\mathbf{a}$ *r.e.* $\Leftrightarrow \exists E \in \mathbf{a}, E$ *r.e.*

Structure des degrés Turing



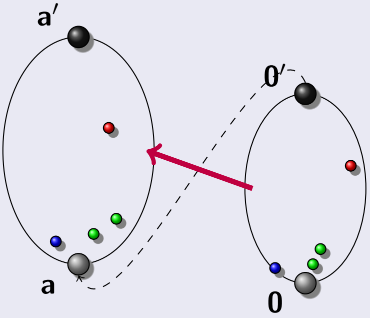
- Structure : degrés intermédiaires, paires minimales, degrés minimaux

Structure des degrés Turing



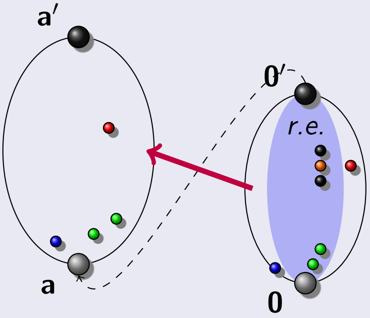
- Structure : degrés intermédiaires, paires minimales, degrés minimaux, homogénéité

Structure des degrés Turing



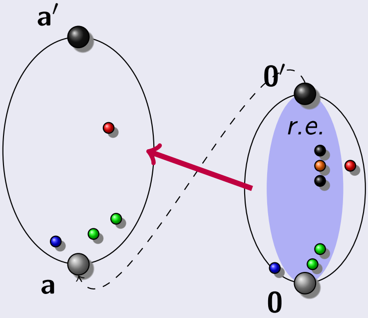
- Structure : degrés intermédiaires, paires minimales, degrés minimaux, homogénéité
- Et pour les degrés *r.e.* ?

Structure des degrés Turing



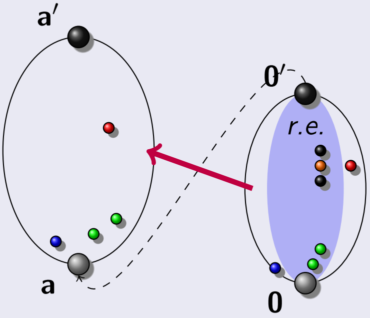
- Structure : degrés intermédiaires, paires minimales, degrés minimaux, homogénéité, densité. . .
- Et pour les degrés *r.e.* ?

Structure des degrés Turing



- Structure : degrés intermédiaires, paires minimales, degrés minimaux, homogénéité, densité. . .
- Et pour les degrés *r.e.* ?
- **Friedberg-Muchnik**

Structure des degrés Turing



- Structure : degrés intermédiaires, paires minimales, degrés minimaux, homogénéité, densité. . .
- Et pour les degrés *r.e.* ?
- **Friedberg-Muchnik**

Des preuves plus *simples* ?

Cardinalité

- A et B ont même cardinalité si $\exists$ bijection entre A et B.
- On confond un cardinal et ses représentants.
- $\mathbf{0} = \emptyset$, $\mathbf{3} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, $\aleph_0 = \mathbb{N}$

Cardinalité

- A et B ont même cardinalité si $\exists$ bijection entre A et B.
- On confond un cardinal et ses représentants.
- $\mathbf{0} = \emptyset$, $\mathbf{3} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, $\aleph_0 = \mathbb{N}$

Hypothèse du continu

- **HC** : $2^{\aleph_0} = \aleph_1$
- $\neg$**HC** : $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Modèle M d'une théorie des ensembles T

Informellement,

- Considérez que M représente tous les ensembles,

Modèle M d'une théorie des ensembles T

Informellement,

- Considérez que M représente tous les ensembles,
- M satisfait une formule ϕ

Modèle M d'une théorie des ensembles T

Informellement,

- Considérez que M représente tous les ensembles,
- M satisfait une formule ϕ
  - ϕ quantifie dans M :
    « $M \models \forall X, \phi(X)$ » ssi « $\forall X \in M, M \models \phi(X)$ »

  $\Rightarrow$ on vérifie ϕ dans M ;

Modèle M d'une théorie des ensembles T

Informellement,

- Considérez que M représente tous les ensembles,
- M satisfait une formule ϕ
  - ϕ quantifie dans M :
    « $M \models \forall X, \phi(X)$ » ssi « $\forall X \in M, M \models \phi(X)$ »

  $\Rightarrow$ on vérifie ϕ dans M ;
- $M \models T$ si M satisfait les axiomes de T.

Plan

1 Introduction

2 Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**
- Prédécesseurs et cardinalité
- Preuve dans **ZF** $+ \neg$**HC**
- Déduction du résultat dans **ZF**

3 Des incomparables directement par forcing

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend **tout** plus simple.

Comptage

- Le nombre de réductions Turing est $\aleph_0$.

$\Rightarrow$ Le nombre de prédécesseurs d'un degré Turing est $\aleph_0$.

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend **tout** plus simple.

Comptage

- Le nombre de réductions Turing est $\aleph_0$.

$\Rightarrow$ Le nombre de prédécesseurs d'un degré Turing est $\aleph_0$.

- Il y a $2^{\aleph_0}$ parties de $\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Il y a $2^{\aleph_0}$ degrés (car un degré est de taille $\leqslant \aleph_0$)

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend **tout** plus simple.

Comptage

- Le nombre de réductions Turing est $\aleph_0$.

$\Rightarrow$ Le nombre de prédécesseurs d'un degré Turing est $\aleph_0$.

- Il y a $2^{\aleph_0}$ parties de $\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Il y a $2^{\aleph_0}$ degrés (car un degré est de taille $\leqslant \aleph_0$)

Lemme

Pas d'ordre total sur $A \subset \mathbf{D}, |A| > \aleph_1$.

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend **tout** plus simple.

Comptage

- Le nombre de réductions Turing est $\aleph_0$.

$\Rightarrow$ Le nombre de prédécesseurs d'un degré Turing est $\aleph_0$.

- Il y a $2^{\aleph_0}$ parties de $\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Il y a $2^{\aleph_0}$ degrés (car un degré est de taille $\leqslant \aleph_0$)

Lemme

Pas d'ordre total sur $A \subset \mathbf{D}, |A| > \aleph_1$.

Démonstration par l'absurde

Supposons : $A \subset \mathbf{D}, |A| > \aleph_1$ degrés, muni d'un ordre total.

Alors : l'ordre est un arbre $\aleph_0$-aire $\Rightarrow$ branche de taille $> \aleph_1$.

$\exists$ degré $\mathbf{a} \in A$, avec $\aleph_1$ prédécesseurs. Contradiction.

Les incomparables faciles avec $\neg$HC

La théorie des ensembles rend tout **plus simple**.

Rappel

$\neg\mathbf{HC}$: $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend tout **plus simple**.

Rappel

$\neg\mathbf{HC}$: $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Lemme

Soit M un modèle de $\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{HC}$ *:*
$M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \not\leqslant_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \not\leqslant_T \mathbf{x})$

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend tout **plus simple**.

Rappel

$\neg\mathbf{HC}$: $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Lemme

Soit M un modèle de $\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{HC}$ *:*

$M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \nleqslant_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \nleqslant_T \mathbf{x})$

Démonstration

- Il y a $2^{\aleph_0}$ ($\geqslant \aleph_2$) degrés.

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend tout **plus simple**.

Rappel

$\neg\mathbf{HC}$: $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Lemme

Soit M un modèle de $\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{HC}$ *:*
$M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \not\leqslant_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \not\leqslant_T \mathbf{x})$

Démonstration

- Il y a $2^{\aleph_0}$ $(\geqslant \aleph_2)$ degrés.
- Soit $A \subseteq \mathbf{D}$ tel que $|A| > \aleph_1$

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend tout **plus simple**.

Rappel

$\neg$**HC** : $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Lemme

Soit M un modèle de **ZF** $+ \neg$**HC** *:*
$M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \not\leqslant_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \not\leqslant_T \mathbf{x})$

Démonstration

- Il y a $2^{\aleph_0}$ ($\geqslant \aleph_2$) degrés.
- Soit $A \subseteq \mathbf{D}$ tel que $|A| > \aleph_1$
- Pas d'ordre total sur A.

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

La théorie des ensembles rend tout **plus simple**.

Rappel

$\neg\mathbf{HC}$: $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Lemme

Soit M un modèle de $\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{HC}$ *:*
$M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \not\leqslant_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \not\leqslant_T \mathbf{x})$

Démonstration

- Il y a $2^{\aleph_0}$ ($\geqslant \aleph_2$) degrés.
- Soit $A \subseteq \mathbf{D}$ tel que $|A| > \aleph_1$
- Pas d'ordre total sur A.
- il y a donc des degrés incomparables.

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

Les incomparables nouveaux sont arrivés.

Théorème d'*absoluteness* de Shoenfield (simplifié)

Si $M \models$ **ZF** et $M \models \phi$,

avec ϕ énoncé de la forme $\exists X, \forall Y, P(X, Y)$, *où* $X, Y \subset \mathbb{N}$ *et* P *ne quantifie que sur des entiers.*

$\Rightarrow$ Alors **ZF** $\vdash \phi$

Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**

Les incomparables nouveaux sont arrivés.

Théorème d'*absoluteness* de Shoenfield (simplifié)

Si $M \models$ **ZF** et $M \models \phi$,

avec ϕ énoncé de la forme $\exists X, \forall Y, P(X, Y)$, *où* $X, Y \subset \mathbb{N}$ *et* P *ne quantifie que sur des entiers.*

$\Rightarrow$ Alors **ZF** $\vdash \phi$

Théorème

Il existe des degrés incomparables.

Théorème d'*absoluteness* de Shoenfield (simplifié)

Si $M \models \mathbf{ZF}$ et $M \models \phi$,

avec ϕ énoncé de la forme $\exists X, \forall Y, P(X, Y)$, *où* $X, Y \subset \mathbb{N}$ *et* P *ne quantifie que sur des entiers.*

$\Rightarrow$ Alors $\mathbf{ZF} \vdash \phi$

Théorème

Il existe des degrés incomparables.

Démonstration

- $M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \not\leq_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \not\leq_T \mathbf{x})$

Théorème d'*absoluteness* de Shoenfield (simplifié)

Si $M \models \mathbf{ZF}$ et $M \models \phi$,

avec ϕ énoncé de la forme $\exists X, \forall Y, P(X, Y)$, *où* $X, Y \subset \mathbb{N}$ *et* P *ne quantifie que sur des entiers.*

$\Rightarrow$ Alors $\mathbf{ZF} \vdash \phi$

Théorème

Il existe des degrés incomparables.

Démonstration

- $M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \not\leq_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \not\leq_T \mathbf{x})$
- énoncé ϕ de la bonne forme.

Les incomparables faciles avec $\neg$HC

Les incomparables nouveaux sont arrivés.

Théorème d'*absoluteness* de Shoenfield (simplifié)

Si $M \models \mathbf{ZF}$ et $M \models \phi$,

avec ϕ énoncé de la forme $\exists X, \forall Y, P(X, Y)$, *où* $X, Y \subset \mathbb{N}$ *et* P *ne quantifie que sur des entiers.*

$\Rightarrow$ Alors $\mathbf{ZF} \vdash \phi$

Théorème

Il existe des degrés incomparables.

Démonstration

- $M \models \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}, (\mathbf{x} \not\leq_T \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \not\leq_T \mathbf{x})$
- énoncé ϕ de la bonne forme.
- Shoenfield : ϕ vrai dans $M \models \mathbf{ZF} \Rightarrow$ vrai dans **ZF**

Plan

Vous avez dit $\neg$**HC** ?

Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

Après la preuve précédente, on reste sur sa faim. . .

- Pourquoi la démonstration est si *simple* ?
- D'où sortent les degrés incomparables de la méthode $\neg$**HC**.
- Quel rôle joue le forcing là-dedans ?
- Comment mieux maîtriser ce qu'il se passe ?

Pour faire du forcing, il faut...

Un *modèle M*

C'est notre point de départ, le résultat obtenu en fin de compte ne sera consistant que si ce modèle existe.

Pour faire du forcing, il faut. . .

Un *modèle* M

C'est notre point de départ, le résultat obtenu en fin de compte ne sera consistant que si ce modèle existe.

Une *notion de forcing* $(\mathbf{P}, \leqslant) \in M$

- $\mathbf{P}$ ensemble ordonné partiellement par $\leqslant$;
- $\mathbb{1}$ plus grand élément de $(\mathbf{P}, \leqslant)$.

Dans notre cas, on considère...

Un *modèle M*

On prend M un modèle transitif dénombrable de **ZF**.

Dans notre cas, on considère...

Un *modèle* M

On prend M un modèle transitif dénombrable de **ZF**.

Une *notion de forcing* $(\mathbf{P}, \leqslant) \in M$

- $\mathbf{P}$ est $Fn(\mathbf{42} \times \mathbb{N}, \mathbf{2})$, [1]
  À voir comme des approximations de fonctions totales.
- $\leqslant$ est l'inclusion inverse : $\supseteq$ (sur les graphes) ;
- $\mathbb{1}$ est la fonction nulle part définie ($= \max(\mathbf{P})$)

1. $Fn(I, J)$ est l'ensemble des fonctions de I dans J à support fini

Densité (*contraintes*) et filtre (*compatibilité*)

$D \subseteq \mathbf{P}$ dense dans $\mathbf{P} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{P}, \exists q \in D, q \leqslant p$

$U \sqsubseteq \mathbf{P}$ filtre si $U \neq \emptyset \wedge \forall p, q \in U, \exists r \in U, (r \leqslant p \wedge r \leqslant q)$

Densité (*contraintes*) et filtre (*compatibilité*)

$D \subseteq \mathbf{P}$ dense dans $\mathbf{P} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{P}, \exists q \in D, q \leqslant p$

$U \sqsubseteq \mathbf{P}$ filtre si $U \neq \emptyset \wedge \forall p, q \in U, \exists r \in U, (r \leqslant p \wedge r \leqslant q)$

Il existe un générique G

G générique ssi G filtre et $\forall D \in M$, dense dans $\mathbf{P}$, $G \cap D \neq \emptyset$

Densité (*contraintes*) et filtre (*compatibilité*)

$D \subseteq \mathbf{P}$ dense dans $\mathbf{P} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{P}, \exists q \in D, q \leqslant p$

$U \sqsubseteq \mathbf{P}$ filtre si $U \neq \emptyset \wedge \forall p, q \in U, \exists r \in U, (r \leqslant p \wedge r \leqslant q)$

Il existe un générique G

G générique ssi G filtre et $\forall D \in M$, dense dans $\mathbf{P}$, $G \cap D \neq \emptyset$

Objectifs

- Construire une extension $M[G]$,
- en utilisant un langage défini par $\mathbf{P}$ et G,
- s'assurer que $M[G]$ contienne bien des incomparables.

Rajouter **42** incomparables

- G intersecte tous les denses.

$\Rightarrow$ seq. ∞ croissante (pr $\subset$) de graphes de $Fn(\mathbf{42} \times \mathbb{N}, \mathbf{2})$.

- $f = \cup G : f \in \mathbf{2}^{\mathbf{42} \times \mathbb{N}} \sim \left(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbf{42}}$
- $\forall k < \mathbf{42}, f_k : n \mapsto f(k, n)$
- On veut forcer $\begin{cases} \forall k \in \mathbf{42}, f_k \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \\ \forall i, j \in \mathbf{42}, f_j \not\leq_T f_i \end{cases}$
- **Incomparables** :
  $D_{i,j,e} = \{p \in \mathbf{P} \mid \exists n, \varphi_e(p(i,n)) \neq p(j,n)\}$
  φ_e ne peut réduire f_j à f_i : se plante quelque part.
- **Totales** : $D'_{\alpha,n} = \{p \in \mathbf{P} \mid p(\alpha, n) \text{ définie}\}$

Tchibââ !

$G \in M[G]$ donc on a les f_k dans $M[G]$.

Des degrés incomparables grâce au forcing

Shoenfield absolument !

Tchibââ !

$G \in M[G]$ donc on a les f_k dans $M[G]$.

Transposition du résultat

$$\phi \equiv \exists \mathbf{x_0} \dots, \mathbf{x_{41}}, \forall i \neq j \in \mathbf{42}, (\mathbf{x_i} \not\leq_T \mathbf{x_j} \wedge \mathbf{x_j} \not\leq_T \mathbf{x_i})$$

- $M \models \phi$
- ϕ énoncé de la forme $\exists X, \forall Y, P(X, Y)$
- Shoenfield $\Rightarrow$ vrai dans tout modèle de **ZF**.

Des degrés incomparables grâce au forcing
Shoenfield absolument !

Tchibââ !

$G \in M[G]$ donc on a les f_k dans $M[G]$.

Transposition du résultat

$$\phi \equiv \exists \mathbf{x_0} \ldots, \mathbf{x_{41}}, \forall i \neq j \in \mathbf{42}, (\mathbf{x_i} \not\leq_T \mathbf{x_j} \wedge \mathbf{x_j} \not\leq_T \mathbf{x_i})$$

- $M \models \phi$
- ϕ énoncé de la forme $\exists X, \forall Y, P(X, Y)$
- Shoenfield $\Rightarrow$ vrai dans tout modèle de **ZF**.

Retour sur la preuve avec ¬**HC**

Modèle de ¬**HC** : contient déjà des incomparables.
Ils ont été rajoutés par forcing.

Conclusion

Que retenir ?

- Les divers modèles de **ZFC** peuvent nous aider à faire de la calculabilité,
- par exemple en jouant avec les cardinalités.
- Intérêt de créer des modèles par forcing !

Conclusion

Que retenir ?

- Les divers modèles de **ZFC** peuvent nous aider à faire de la calculabilité,
- par exemple en jouant avec les cardinalités.
- Intérêt de créer des modèles par forcing !

Pour la suite

- **Friedberg-Muchnik**, degrés *r.e.* ?
- Qu'est-ce que le théorème d'absoluteness de Shoenfield ?
- $\neg$**HC**, d'autres indépendants ? Grands cardinaux ?

Merci de votre attention !

Des questions ?